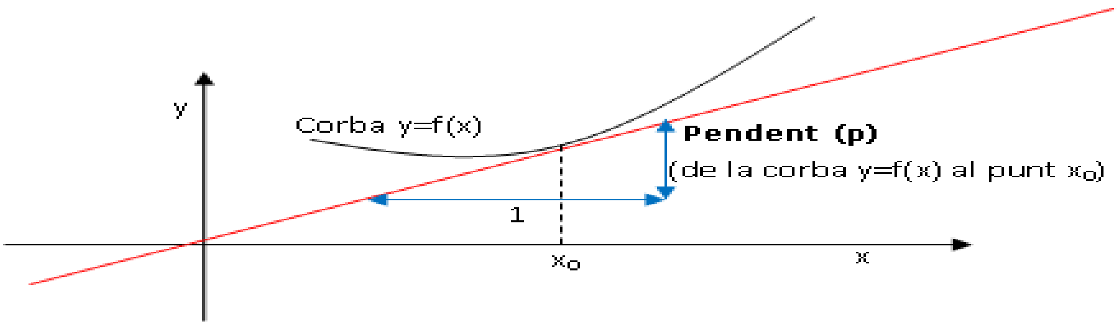
Concepte de derivada:

La **derivació** és un mètode per calcular el ritme al que varia una quantitat, ***y***, (per exemple la posició d'un cotxe en una carretera recta) respecte al canvi d'un altre quantitat ***x*** (per exemple el temps), quan la quantitat ***y*** en relació a la quantitat ***x*** és una variable dependent. D'aquest tipus de canvi se'n diu la **derivada** de ***y*** respecte de ***x***. La dependència de ***y*** respecte de ***x*** significa que ***y*** és una funció de ***x***. Si *x* i *y* són nombres reals, i si la gràfica de ***y*** es dibuixa respecte de ***x***, la derivada mesura el pendent d'aquesta gràfica en cada punt. Aquesta relació sovint s'indica amb la fórmula ***y* = *f*(*x*)**, on *f* indica funció.

El cas més senzill es dóna quan *y* és una funció lineal de *x* (per exemple quan el cotxe recorre distàncies directament proporcionals al temps transcorregut); això vol dir que la gràfica de *y* respecte de *x* és una línia recta (en l'exemple a doble temps doble recorregut, a triple temps triple recorregut... i tots els punts de la gràfica queden damunt d'una recta). En aquest cas, $y = f(x) = m\,x + c$ (l'equació d'una recta en coordenades cartesianes), on *m* i *c*, són nombres reals (en l'exemple del cotxe *m* és la velocitat, que en aquest cas senzill és constant, i *c* és la posició on es troba el cotxe quan *x* val zero, és a dir, la posició inicial). El pendent *m* ve donat per:

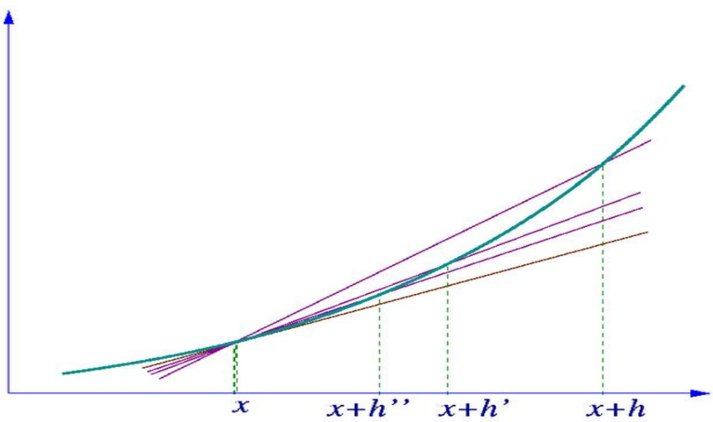
$$m = \frac{\text{canvi de } y}{\text{canvi de } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



La derivada és el valor del quocient de diferències a mesura que la secant es fa més i més propera a la tangent.

Formalment, la **derivada** de la funció *f* a *a* és el límit $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que és el límit del quocient de diferències quan *h* tendeix a zero, si aquest límit existeix. Si el límit existeix, llavors *f* és **derivable** al punt *a*. Aquí *f′* (*a*) és una de les múltiples notacions de la derivada



Taules i regles de derivació:

REGLES DE DERIVACIÓ

Suma i resta	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
Producte per un real	$(\alpha f)' = \alpha f'$	
Producte	$(fg)' = f'g + fg'$	
Quocient	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	
Composició Regla de la cadena	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	

DERIVADES DE FUNCIONS ELEMENTALS

Tipus	Formes	
	Simples	Compostes
Potencial	$D\,k = 0$ $D\,x = 1$ $D\,x^n = nx^{n-1}$ $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\,f^n = nf^{n-1} \cdot f'$
Logarítmic	$D\ln x = \frac{1}{x}$ $D\log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a},\quad a > 0, a \neq 1$	$D\ln f = \frac{f'}{f}$ $D\log_a f = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$
Exponencial	$D\,e^x = e^x$ $D\,a^x = a^x \cdot \ln a,\quad a > 0, a \neq 1$	$D\,e^f = e^f \cdot f'$ $D\,a^f = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
Sinus	$D\sin x = \cos x$	$D\sin f = f' \cdot \cos f$
Cosinus	$D\cos x = -\sin x$	$D\cos f = -f' \cdot \sin f$
Tangent	$D\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$D\,\mathrm{tg}\,f = \frac{f'}{\cos^2 f'} = f'(1 + \mathrm{tg}^2 f)$

EXERCICIS

Calculeu les derivades de les següents funcions:

1. $f(x) = 3x + 2$	2. $f(x) = 4x - 2$	3. $f(x) = x^2 + 3$	4. $f(x) = 2x^2 - x + 2$
5. $f(x) = x^3$	6. $f(x) = \sqrt{x}$	7. $f(x) = \sqrt{x+1}$	8. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 5$
9. $f(x) = \frac{1}{x}$	10. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$	11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$	12. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
13. $f(x) = (2x+1)(x^2+4)$	14. $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$	15. $f(x) = 3\sqrt{x} + x - 7$	16. $f(x) = x^{-1} + 3x^{-2} + 4x^{-3}$
17. $f(x) = x \cdot \sin x$	18. $f(x) = 3x^{1/2} + x$	19. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 5$	20. $f(x) = \cos x \cdot \ln x$